

UMA DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA DE MASSERA

*Alexandre A. P. Rodrigues*¹

Centro de Matemática da Universidade do Porto, e
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687, 4169-007 Porto, Portugal
e-mail: alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Resumo: Tendo como mote o trabalho de J. Massera [17], este artigo aborda, de uma forma acessível, o comportamento dinâmico de uma classe de equações diferenciais no plano. Sob certas condições nessa classe, prova-se aqui que se existir uma solução periódica, esta terá de ser única e globalmente atratora. A demonstração do resultado segue de perto o artigo de Ciambellotti [6], o qual assenta em técnicas geométricas usadas na teoria clássica de sistemas dinâmicos no plano e que não são generalizáveis para dimensões maiores. No decorrer da exposição, explicitar-se-á a ideia geométrica da demonstração e dar-se-ão a conhecer alguns assuntos relacionados, designadamente as Equações de Liénard e o 16.^o Problema de Hilbert.

Abstract Based on Massera's work [17], this article aims to describe the dynamics of a class of differential equations on the plane. Under generic conditions, one proves that if a periodic solution exists, it should be unique and globally attracting. The proof of this result follows closely the geometrical ideas of Ciambellotti [6] developed on the plane and which cannot be extended to higher dimensions. Throughout the paper, we stress the geometric ideas of the proof and recall some related topics, namely the Liénard Equations and the 16th Hilbert's problem.

palavras-chave: Equações de Liénard, Generalização do Teorema de Massera

keywords: Liénard equations, Generalization of Massera's Theorem

¹A investigação levada a cabo pelo autor, membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP), teve apoio financeiro da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através dos programas POCTI e POSI, com fundos nacionais e da União Europeia. A. A. P. Rodrigues foi apoiado directamente pela FCT através da bolsa de Pós-Doutoramento com referência SFRH/BPD/84709/2012.

1 Uma digressão pela História

Motivado pelo *Problema dos Três Corpos*, na década de 80 do século XIX, Henri Poincaré num trabalho composto por quatro partes [20] cria a *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais*, com o objectivo de descrever retratos de fase de equações diferenciais autónomas. Depois de ter formalizado pela primeira vez a noção de ciclo-limite [20, pp. 261(8)] como uma trajectória fechada e isolada que pode aparecer no retrato de fase de equações diferenciais, mostrar analiticamente a sua existência e unicidade em exemplos concretos é geralmente uma tarefa árdua. Neste sentido, resultados que possam limitar o número de ciclos-limite são bem-vindos. Na concretização deste objectivo, Poincaré prova que, numa equação diferencial polinomial planar de grau superior a 1 cujo fluxo não possui conexões entre pontos de equilíbrio (*ie*, sem ligações homo e heteroclínicas), o número de ciclos-limite é finito. Não obstante, o número máximo e a posição relativa dos ciclos-limite constitui ainda hoje um problema em aberto.

Em 1900, realiza-se em Paris o *Congresso Internacional de Matemática*. Considerado, de forma quase unânime, como um dos maiores matemáticos do século XX, David Hilbert profere nessa ocasião um longo discurso, delineando vinte e três² grandes temas de pesquisa para o novo século prestes a iniciar-se. A palestra de Hilbert foi bem mais do que uma mera exposição de questões em aberto; ele esboçou a sua perspectiva da matemática e propôs problemas importantes no contexto desta filosofia os quais, até aos dias actuais, constituem uma fonte inesgotável de matemáticas de diversas áreas. Um dos problemas mais famosos é a segunda parte do 16.º Problema³, intimamente ligado ao estudo qualitativo de equações diferenciais polinomiais no plano – ver [11, 12]. Este problema nasceu pela primeira vez em 1891 e permanece ainda hoje não totalmente resolvido⁴.

Sendo incortornável a importância crescente das equações diferenciais nos mais diversos âmbitos, torna-se imperioso o seu tratamento analítico. Na literatura, existe um grande número de resultados que se focam na exis-

²Ao preparar os problemas, Hilbert havia listado vinte e quatro problemas, mas acabou por não enunciar um deles. O vigésimo quarto problema diz respeito a um critério para o uso de métodos gerais em *Teoria de Prova*. (Fonte: [24]).

³De acordo com a formulação original, a primeira parte do 16.º Problema de Hilbert dedica-se ao estudo da posição relativa de curvas algébricas e superfícies. (Fonte: [9]; consulte-se também <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert>).

⁴Em Ilyashenko [11, Fig. 1], é possível consultar um gráfico explicitando os avanços e recuos na resolução do 16.º Problema de Hilbert. O gráfico contém o nome dos matemáticos envolvidos e as diferentes abordagens usadas.

tência e/ou unicidade de soluções periódicas (atractoras ou não) na dinâmica de equações diferenciais planares [14, 23]. Assume especial destaque um resultado provado em 1886 por Poincaré e, de forma mais rigorosa, em 1901, por Bendixson, hoje conhecido por *Teorema de Poincaré-Bendixson* – [10, 13, 21]. Este resultado estabelece que, no contexto de um sistema dinâmico contínuo planar, se φ_t for uma solução contida numa região fechada e limitada do plano de fase sem pontos de equilíbrio nem conexões homo/heteroclínicas, então a trajectória φ_t é fechada ou aproxima-se de uma solução periódica quando $t \rightarrow +\infty$.

Neste artigo estabelecer-se-ão condições para assegurar a unicidade de ciclos-limite numa classe especial de Equações de Liénard e aplicar o estudo a modelos da forma $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, tipicamente usados em circuitos ondulatórios – veja-se [3, Cap. 2]. Seguindo de perto Ciambellotti [6], este texto foca-se numa generalização de um resultado publicado em 1954 pelo matemático uruguaio Massera [17] que, por sua vez, pode ser considerado como uma generalização do Teorema de Sansone [22] sobre a existência e unicidade de soluções periódicas não triviais num caso particular de Equações de Liénard [7]. Mais precisamente, em [17], o autor mostra que uma das hipóteses consideradas em [22] pode ser omitida:

L' A. montre que dans un théorème démontré par G. SANSONE pour l'équation $\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega f(i) \frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0$ peut être supprimée l'hypothèse $|f(i)| < 2$.

Massera [17], 1954

Tal como em [5], a demonstração que aqui é apresentada assenta em técnicas geométricas simples usadas em sistemas dinâmicos contínuos para a captura de ciclos-limite no plano. Consistem na construção de uma “cerca” numa região sem pontos de equilíbrio que impede as soluções de a cruzarem transversalmente. Não havendo pontos de equilíbrio nessa região invariante, resta a existência de trajectórias fechadas não triviais – mais detalhes em [13, Cap. 14.1].

Ao longo do presente artigo, não foi ambição do autor descrever as demonstrações com toda a formalidade. Assumindo alguns pré-requisitos de equações diferenciais ordinárias, valorizar-se-ão as ideias geométricas da demonstração em detrimento da inclusão dos detalhes. Para o leitor mais curioso, são acrescentadas algumas referências bibliográficas onde se podem encontrar a justificação de algumas afirmações.

2 Preliminares

2.1 Funções homogêneas

No que se segue, introduz-se a definição de função homogênea, um conceito de *Álgebra Linear* muito usado em *Análise Dimensional* e em *Física*. Uma consequência importante da homogeneidade é a de que, conhecendo-se o valor da função num ponto, então sabe-se o seu valor ao longo da recta que une a origem a esse ponto. Vejam-se mais detalhes em [1, pp. 143].

Definição 1 *Seja $n \in \mathbb{N}_0$. Diz-se que uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau n se verifica a condição:*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Por exemplo, as aplicações constantes e lineares são homogêneas de grau 0 e 1, respectivamente; já a função cuja expressão analítica é $g(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y^2}\right)$, $y \neq 0$, não é homogênea.

O resultado seguinte estabelece que uma função homogênea é constante ao longo de cada raio.

Lema 1 *Uma função homogênea de grau zero é constante ao longo das semi-rectas que se iniciam na origem.*

Demonstração: Seja f uma função homogênea de grau zero. A equação paramétrica dos pontos (x, y) de uma semi-recta com extremidade na origem e que contém o ponto de coordenadas $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ é dada por $(x, y) = t(x^*, y^*)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Uma vez que f é homogênea de grau zero, então, para todo o $t \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$f(tx^*, ty^*) = f(t(x^*, y^*)) = f(x^*, y^*),$$

ficando provado o pretendido. □

2.2 Conjuntos estrelados

O conceito que se segue, o de conjunto estrelado relativamente a um ponto, generaliza a noção de *convexidade* de regiões do plano, no sentido em que qualquer conjunto convexo é estrelado relativamente a qualquer ponto no seu interior, sendo o recíproco falso.

Definição 2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $X_0 \in U$. O conjunto U diz-se estrelado relativamente a X_0 se e só se o segmento de recta que une X_0 a qualquer elemento $X \in U$ está contido em U .*

Note-se que um subconjunto de \mathbb{R}^2 pode ser estrelado relativamente a um ponto e não o ser relativamente a outro. Na Figura 1 está representado um conjunto não convexo, estrelado relativamente a X_0 e não estrelado relativamente a X_1 .

3 Unicidade de Ciclos-limite

3.1 Descrição do problema

Com base em [6, 17], de seguida descreve-se o comportamento dinâmico da classe de equações diferenciais autónomas planares da forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = k(y) \\ \dot{y} = -f(x)k(y) - h(x) \end{cases} \quad (1)$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $f, k, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações suaves (*i.e.* pelo menos C^1) satisfazendo as seguintes condições:

- (P1) a função k é tal que, para todo o $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tem $yk(y) > 0$;
- (P2) a função h é tal que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tem $xh(x) > 0$;
- (P3) existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ se e só se $x \in [-\delta, \delta]$;
- (P4) a função f é decrescente em $] -\infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$;
- (P5) para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função $\Psi(x, y) = \frac{h(x)}{k(y)}$ é homogénea de grau zero.

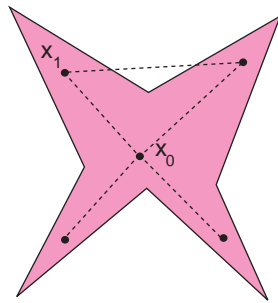


Figura 1: Representação de um conjunto estrelado relativamente a X_0 e não estrelado relativamente a X_1 .

As equações (1) são um caso particular de Equações de Liénard [7]. Para simplificar os cálculos, assume-se que $k'(0)h'(0) \neq 0$ e $f^2(0)k'(0) < 4h'(0)$. Relembrando que um ponto de equilíbrio de (1) é um zero do campo de vectores associado, conclui-se facilmente que:

Lema 2 *A origem O é o único ponto de equilíbrio do sistema (1).*

Demonstração: Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de equilíbrio de (1), ou seja, tal que:

$$\begin{cases} 0 = k(y_0) \\ 0 = -f(x_0)k(y_0) - h(x_0) \end{cases} \quad (2)$$

Então, tem-se $k(y_0) = 0$ e $h(x_0) = 0$. Das propriedades (P1)–(P2) e do facto de h e k serem funções contínuas em \mathbb{R} , conclui-se imediatamente que $x_0 = y_0 = 0$. \square

Supondo que $f^2(0)k'(0) < 4h'(0)$ e usando técnicas de análise clássica devidas a Lyapunov [15, 16], decorre que a origem é um equilíbrio onde soluções próximas tendem a afastar-se em tempo positivo num movimento em espiral; diz-se então que a origem é um *foco instável*. Mais, soluções que se iniciam na parte positiva do eixo dos yy verificam:

$$\dot{x} = k(y) > 0 \quad \text{e} \quad \dot{y} = -f(0)k(y) - h(0) = -f(0)k(y) > 0, \quad (3)$$

o que significa que a solução entra no primeiro quadrante, subindo – veja-se Figura 2(a). Portanto, sendo a origem um foco instável, uma solução próxima afasta-se e “roda” no sentido horário em torno da origem, em tempo positivo.

3.2 Soluções periódicas não triviais

O lema e a demonstração seguintes, seguem de perto o artigo [5].

Lema 3 *Se \mathcal{C} é uma solução periódica diferente de O da equação (1), então a região do plano delimitada por \mathcal{C} é um conjunto estrelado em relação à origem.*

Demonstração: Sugere-se que o leitor acompanhe a demonstração, observando a Figura 2. O estudo está feito para o primeiro quadrante, sendo similar a análise nos outros quadrantes.

Seja \mathcal{C} uma solução periódica não trivial de (1) e que contém A , um ponto arbitrário com ordenada positiva. Suponha-se que a região delimitada por \mathcal{C} não é um conjunto estrelado em relação à origem. Então existe pelo menos

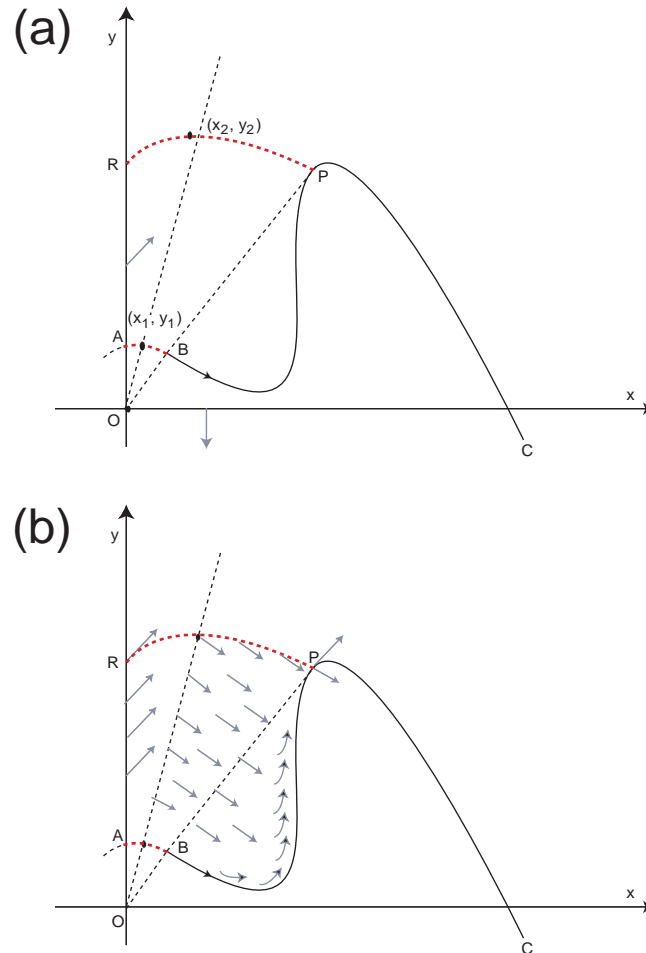


Figura 2: Ilustração do argumento da demonstração do Lema 3.

uma semi-recta com origem em O que intersecta C em dois pontos distintos. Sejam eles B e P , conforme ilustrado na Figura 2(a). Recorde-se que, por (P1)–(P3), uma solução com condição inicial na parte positiva do eixo dos yy verifica as condições definidas em (3) e, portanto, direcciona-se para a direita e para cima em tempo positivo. Sejam agora $\lambda = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} > 1$ e RP a imagem da curva-solução que liga A a B pela homotetia de centro na origem e razão λ . Sejam ainda (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto qualquer na curva AB , (x_2, y_2) as coordenadas de um ponto qualquer na curva RP com $x_2 > x_1$, e $y = mx$ com $m \neq 0$, a equação reduzida da recta que une (x_1, y_1)

a (x_2, y_2) . É claro que o declive m vai variando à medida que (x_1, y_1) vai percorrendo a curva AB .

Uma vez que Ψ é homogénea de grau zero, do Lema 1 conclui-se que $\Psi(x_1, y_1) = \Psi(x_2, y_2)$. Mais, por (P4), sabe-se que, se $0 < x_1 < x_2$, então

$$f(x_1) \leq f(x_2). \quad (4)$$

Admita-se que $(x(t), y(t))$ é uma solução de (1) e $t_1^* \in \mathbb{R}$ é tal que $(x(t_1^*), y(t_1^*)) = (x_1, mx_1)$. Portanto, se $k(mx_1) \neq 0$ (ou seja, $x_1 \neq 0$), da derivação da função composta, de (P5) e da desigualdade (4), decorre o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x_1, mx_1) &= \frac{dy}{dt}(t_1^*) / \frac{dx}{dt}(t_1^*) = \frac{-f(x_1)k(mx_1) - h(x_1)}{k(mx_1)} \\ &= -f(x_1) - \frac{h(x_1)}{k(mx_1)} = -f(x_1) - \Psi(x_1, mx_1) \\ &\geq -f(x_2) - \Psi(x_2, mx_2) \\ &= \frac{dy}{dx}(x_2, mx_2) \end{aligned}$$

Tem-se então que trajectórias com condição inicial no arco RP direccionam-se para dentro da região definida pelos pontos (x_1, y_1) , B , P e (x_2, y_2) , conforme esquematizado na Figura 2(b). Não havendo mais pontos de equilíbrio para além da origem, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, as soluções teriam que intersectar o ciclo-limite \mathcal{C} algures entre A e P , gerando-se uma contradição uma vez que, pelo *Teorema de Existência e Unicidade de Solução* para equações diferenciais autónomas [2], por um ponto passa uma e uma só solução de (1). \square

3.3 Ciclos-limite

Em seguida, disseminar-se-á o conceito de ciclo-limite atractor introduzido por Lyapunov [15, 16] e generalizado por Milnor [18] em 1985. De uma forma sumária, um ciclo-limite é uma trajectória fechada de (1), diferente de O , que possui pelo menos uma solução a aproximar-se dela, num movimento em espiral, quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Uma boa abordagem e perspectiva histórica sobre os conceitos de *atração* e *estabilidade* pode ser encontrada em Buescu [4, Cap. 1].

No que se segue, a letra d designa a métrica usual no plano euclidiano e $\varphi(t, X)$ denota a única curva-solução de (1) tal que $\varphi(0) = X$, sendo $X \in \mathbb{R}^2$.

Definição 3 Seja \mathcal{C} uma solução periódica não trivial de uma equação diferencial. Diz-se que \mathcal{C} é assintoticamente estável se (ver Figura 3):

- para toda a vizinhança aberta U de \mathcal{C} , existir uma outra vizinhança $V \subseteq U$ de \mathcal{C} tal que para toda a trajectória $\varphi(X, t)$ com $X \in V$ se tem

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t, X) \in U;$$

- existe uma vizinhança V de \mathcal{C} tal que,

$$\forall X \in V, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, X), \mathcal{C}) = 0.$$

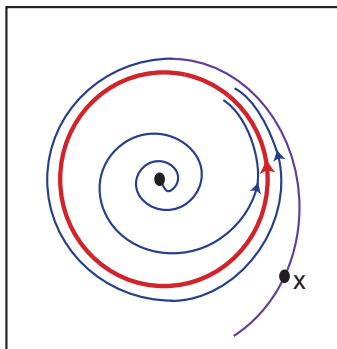


Figura 3: Exemplo de uma solução periódica \mathcal{C} assintoticamente estável: soluções próximas aproximam-se de \mathcal{C} no futuro de modo uniforme.

No lema seguinte demonstra-se que se existir um ciclo-limite \mathcal{C} no fluxo de (1), então este atrairá todas as soluções exceptuando a origem. Diz-se então que \mathcal{C} é um conjunto *globalmente atrator*. Usando o Teorema de Liouville [2], segue imediatamente que o campo associado ao sistema (1) não é conservativo, no sentido de não preservar a medida de Lebesgue.

Lema 4 Se \mathcal{C} é uma solução periódica não trivial de (1), então \mathcal{C} é única e assintoticamente estável.

Demonstração: Sugere-se que o leitor acompanhe a demonstração que se segue observando a Figura 4. Sejam \mathcal{C} uma solução periódica não trivial de (1) e $P_2 = (x_2, y_2)$ um ponto fora da região delimitada por \mathcal{C} .

Sendo $\dot{O}P_2$ a semi-recta com origem no ponto O , considere-se $P_1 = \dot{O}P_2 \cap \mathcal{C}$ com coordenadas (x_1, y_1) . Defina-se $\lambda = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} > 1$. Seja $\mathcal{C}_\lambda^{ext}$ a

imagem de \mathcal{C} pela homotetia centrada na origem e razão λ . Observe-se que esta construção faz sentido porque, de acordo com o Lema 3, a região delimitada por \mathcal{C} é um conjunto estrelado em relação à origem. Os argumentos anteriormente explicitados permitem concluir que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad \frac{dy}{dx}(x_1, mx_1) \geq \frac{dy}{dx}(x_2, mx_2),$$

o que implica que soluções com condições iniciais na região delimitada por $\mathcal{C}_\lambda^{ext}$ e \mathcal{C} são atraídas para \mathcal{C} . Se P_3 for um ponto dentro da região delimitada por \mathcal{C} , constrói-se $\mathcal{C}_\lambda^{int}$ de forma análoga e demonstra-se que:

$$\forall x_1, x_3 \in \mathbb{R}, \quad \frac{dy}{dx}(x_1, mx_1) \leq \frac{dy}{dx}(x_3, mx_3).$$

E portanto soluções com condições iniciais na região delimitada por $\mathcal{C}_\lambda^{int}$ e \mathcal{C} são atraídas para \mathcal{C} . Fica então provado que \mathcal{C} é a única solução periódica de (1) e assintoticamente estável. \square

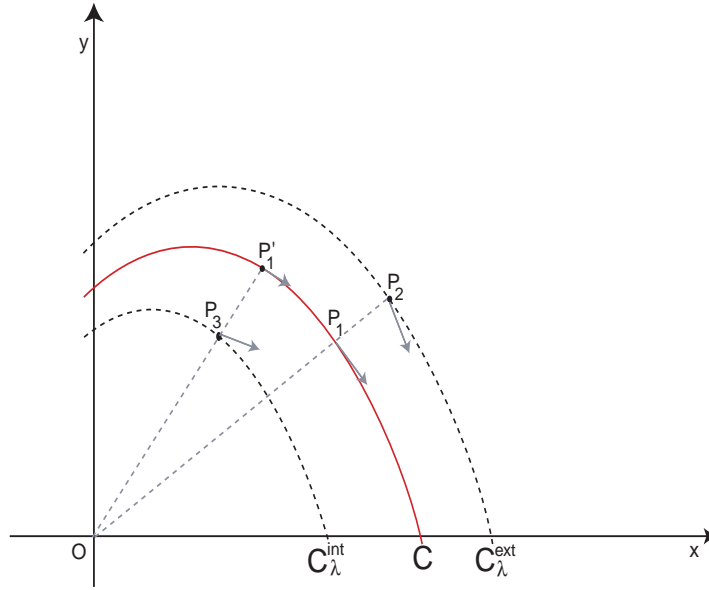


Figura 4: Soluções com condições iniciais na região delimitada por $\mathcal{C}_\lambda^{ext}$ e $\mathcal{C}_\lambda^{int}$ são atraídas para \mathcal{C} .

4 Aplicação: Teorema de Massera

Normalmente usam-se equações diferenciais autónomas cujo fluxo possui soluções periódicas atractoras na modelação de situações que apresentam oscilações auto-sustentadas, ou seja, que apresentam um comportamento oscilatório mesmo na ausência de forças exteriores – um dos exemplos mais conhecidos neste contexto é o modelo de *Van der Pol* desenvolvido no âmbito de circuitos eléctricos [21].

O objectivo desta secção é o de descrever o retrato de fase de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo $\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0$, onde f é uma função satisfazendo (P3)–(P4) e $\omega \in \mathbb{R}^+$, condições assumidas daqui em diante.

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $\omega \in \mathbb{R}^+$. Em (1), se $k(y) = \omega y^{2n+1}$ e $h(x) = \omega x^{2n+1}$, então

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y^{2n+1} \\ \dot{y} = \omega[-f(x)y^{2n+1} - x^{2n+1}] \end{cases} \quad (5)$$

satisfaz (P1)–(P5). O resultado que se segue constitui o cerne deste artigo e descreve a existência de não mais do que um ciclo-limite para uma dada equação, o qual, a existir, será um atractor global. Visto como uma generalização de Sansone [22], o teorema foi demonstrado por Massera [17] em 1954, no âmbito do estudo da unicidade de soluções periódicas de uma Equação de Liénard. A demonstração da versão do Teorema de Massera que se segue é um corolário do Lema 4.

Teorema 5 (Massera (1954)) *Seja f uma função satisfazendo as hipóteses (P3)–(P4). O retrato de fase da equação diferencial*

$$\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (6)$$

tem no máximo uma única solução periódica não trivial. Se existir, esta é globalmente atractora.

Demonstração: Se $\omega y = \dot{x}$, então $\ddot{x} = \omega \dot{y} = \omega^2[-f(x)y - x]$ e portanto a equação (6) é equivalente ao sistema (5) no caso $n = 0$. Uma vez que (5) satisfaz (P1)–(P5), do Lema 4 conclui-se que, se existir um ciclo-limite, ele é único e terá que ser um atractor global, ficando demonstrado o pretendido. \square

Na Figura 5, estão representadas duas soluções de (5) onde $n = 0$, $\omega = 1$ e $f(x) = x^2 - 1$, com condições iniciais (2.0, 3.0) e (0.5, 0.5), usando o software

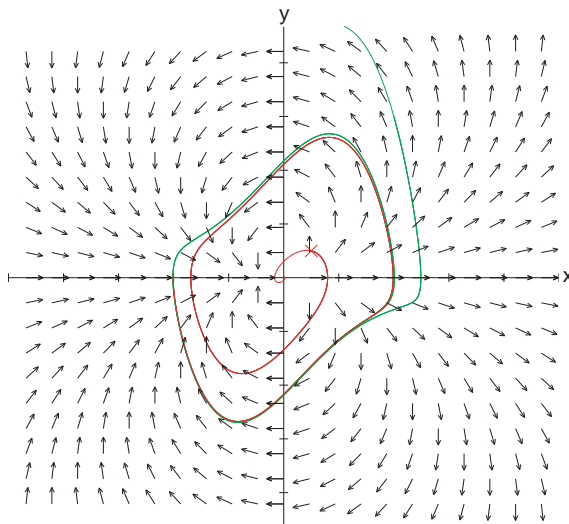


Figura 5: Ilustração de duas soluções da equação (5), com $n = 0$, $\omega = 1$ e $f(x) = x^2 - 1$ e condições iniciais $(2, 3)$ e $(0.5, 0.5)$. A figura sugere que ambas as curvas se aproximam de uma solução periódica quando $t \rightarrow +\infty$.

winplot. É visível o sentido e a direcção do campo de vectores em cada ponto e é sugerida a existência de uma solução periódica que atrai as duas trajetórias. Com os mesmos parâmetros na Figura 6 está esquematizada a evolução da componente y da solução de (5) com condição inicial $(2.0, 3.0)$, realçando-se um comportamento quase periódico.

5 Comentários finais

Equações do tipo $\ddot{x} + \omega f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0$ têm uma aplicação directa no estudo de oscilações livres amortecidas, onde a intensidade do amortecimento é controlada por f . Este é o caso descrito pelo movimento unidimensional dos amortecedores de automóveis, por exemplo. No contexto da fisiologia, é também razoável supor que os batimentos cardíacos de uma pessoa saudável possam ser descritos por este tipo equações – após ligeiras perturbações, o coração sofre alterações e regressa ao seu estado normal – consulte-se [19, Sec.7.9, Sec 10.7]. Trata-se de um modelo simples em que variações em torno de um ritmo principal são desprezáveis e em que um ritmo periódico é reestabelecido após ligeiras perturbações.

À laia de observação final, será oportuno dizer que a procura de ciclos-limite no fluxo de equações diferenciais no plano, o tema central da segunda parte do 16.º Problema de Hilbert, é difícil, senão impossível, tornando-se imperioso a cisão do problema em classes. As Equações de Liénard, e em particular o Teorema de Massera, são a concretização desta estratégia. Este pequeno texto deve ser encarado como uma exposição acessível destes assuntos, com especial enfoque numa técnica usada em sistemas dinâmicos contínuos planares para a captura de soluções periódicas. A digressão teve como mote o (para muitos desconhecido) Teorema de Massera, um resultado com mais de 50 anos, fácil de interpretar e de demonstrar⁵.

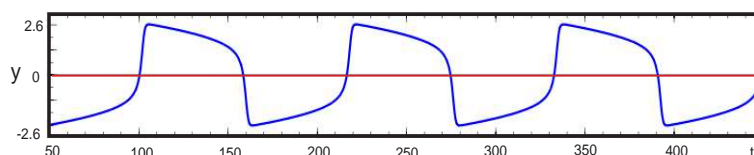


Figura 6: Representação da evolução da componente y da solução da equação (5), com $n=0$, $\omega=1$, $f(x)=x^2-1$ e condição inicial $(2.0, 3.0)$ ($t \in [50, 450]$).

Nota: Este texto não foi escrito ao abrigo do *Novo Acordo Ortográfico*.

Agradecimento: O autor agradece à Professora *Maria Carvalho* da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e ao relator anónimo, pelas sugestões que apresentaram e que melhoraram inquestionavelmente o texto.

Referências

- [1] F. R. D. Agudo, *Análise Real*, Escolar Editora, 2.^a edição, 1994.
- [2] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] M. Braun, *Differential equations and their applications*, Springer, 4.^a edição, 1993.
- [4] J. Buescu, *Exotic Attractors*, Progr. Math., Vol. 153, Birkhauser, Springer Basel AG, 1997.

⁵Uma recente generalização deste resultado pode ser encontrada em [8, Sec. 3.1].

-
- [5] T. Carletti, L. Rosati, G. Villari, *Qualitative analysis of the phase portrait for a class of planar vector fields via the comparison method*. Non-linear Anal. 67(1), 39–51, 2007.
 - [6] L. Ciambellotti, *Uniqueness of Limit Cycles for Liénard Systems. A Generalization of Massera's Theorem*, Qual. Theory Dyn. Syst., 7, 405–410, 2009.
 - [7] C. Cristopher, *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Liénard systems*, J. Math. Anal. Appl., 229 (1), 319–329, 1999.
 - [8] A. Gasull, H. Giacomini, *Some applications of the extended Bendixson-Dulac Theorem*, in S. Ibáñez, J.S. Pérez del Río, A. Pumariño and J.A. Rodríguez (eds), *Progress and challenges in dynamical systems*, Springer Proc. Math. and Statistics, 233–252, 2013
 - [9] D. Hilbert, *Mathematical Problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 8, 37, 407–436, 2000 (Reedição da versão de 1902).
 - [10] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
 - [11] Y. Ilyashenko, *Centennial History of Hilbert's 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 39, 3, 301–354, 2002.
 - [12] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko (Editors), *Concerning the Hilbert 16th problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
 - [13] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
 - [14] A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh, *On Liénard's equation*, Lecture Notes in Math., 597, Springer, Berlin, 335–357, 1977.
 - [15] A. M. Lyapunov, *Problème générale de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (9) 203–474, 1950.
 - [16] A. M. Lyapunov, *Stability of Motion*, Academic Press (New York), 1966.
 - [17] J. L. Massera, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard*, Bolletino della U.M.I. (3), 9, 367–369, 1954.
 - [18] J. Milnor, *On the concept of attractor*, Commun. Math. Phys., 99, 177–195, 1985.

-
- [19] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, Mack Pesquisa, Editora Livraria de Física, 2006.
 - [20] M. H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, I. J. Math. Pures Appl. (7) 375–422, 1881; (8) 251–296, 1882; (1) 167–244, 1885; (2) 151–217, 1886.
 - [21] C. Robinson, *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos*, CRX Press LLC, 1999.
 - [22] G. Sansone, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard*, *Calcolo del periodo*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 10, 155–171, 1950–1951.
 - [23] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer 20, 2, 7–15, 1998.
 - [24] R. Thiele, *Hilbert's Twenty-Fourth Problem*, Amer. Math. Monthly, 1–24, 2003.

